توابع حسابی

محمدرضا پورنکی

چکیده

در این مقاله توابع حسابی را بررسی می‌کنیم و بعضی از خواص این تابع‌ها را ثابت خواهیم کرد. در پایان نیز دو تابع حسابی مهم را معرفی می‌کنیم و ضابطهٔ صریحی برای محاسبهٔ مقدار آنها پیدا خواهیم کرد.

مقدمه

در مقالهٔ تابع حسابی اویلرکه در شمارهٔ قبل به چاپ رسیده است، تابع حسابی اویلر (تابع فی اویلر) را معرفی کردیم. یادآوری می‌کنیم که $\phi(n)$ برابر است با تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اول هستند و این ضابطه، تابعی روی اعداد طبیعی تعریف می‌کند که آن را تابع حسابی اویلر می‌نامند. همچنین، دیدیم که این تابع ارتباطی نزدیک با دستگاه مخفف مانده‌ها دارد و از آنجا توانستیم خاصیتی که به خاصیت ضربی تابع ϕ معروف است و حکم می‌کند که «برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$» را ثابت کنیم. اکنون می‌خواهیم مفهوم تابع حسابی را تعریف کنیم(تابع حسابی اویلر حالت خاصی از ردهٔ این توابع خواهد بود)، همچنین خاصیت ضربی را برای یک تابع حسابی تعریف خواهیم کرد و با معرفی دو تابع حسابی مهم، ضابطه‌ای برای محاسبهٔ مقدار این توابع خواهیم یافت.

توابع حسابی

تعریف ۱. *هر تابعی که دامنهٔ تعریف آن مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد را تابع حسابی می‌نامند.*

مثال ۱. *تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ یک تابع حسابی است.*

مثال ۲. *تابع $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ که برای هر n طبیعی برابر تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اولند($\phi(n) =$) تعریف می‌شود، یک تابع حسابی است. توجه می‌کنیم که ϕ همان تابع حسابی اویلر است.*

مثال ۳. *تابع $d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ*

$$d(n) = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } n$$

یک تابع حسابی است.

مثال ۴. *تابع $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ*

$$\sigma(n) = \text{مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت } n$$

یک تابع حسابی است.

شمارهٔ ۲

(خرداد ۱۳۷۹) صص ۲۰ـ۱۶

اکنون خاصیتی را معرفی می‌کنیم که به خاصیت ضربی تابع حسابی معروف است.

تعریف ۲. *فرض کنیم $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک تابع حسابی باشد. f را ضربی می‌نامیم هرگاه برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $f(mn) = f(m)f(n)$.*

مثال ۵. *قبلاً ثابت کردیم که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ و لذا ϕ تابعی ضربی است. توجه می‌کنیم که در اینجا لازم است که $(m,n) = ۱$؛ زیرا مثلاً $\phi(۲ \times ۴) \neq \phi(۲)\phi(۴)$.*

مثال ۶. *فرض کنیم $J : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با $J(n) = ۱$ برای هر n تعریف شود؛ در این صورت برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $J(mn) = J(m)J(n)$ و لذا J تابعی ضربی است. توجه می‌کنیم که در اینجا $(m,n) = ۱$ لزومی ندارد و در واقع برای هر دو عدد طبیعی m و n، $J(mn) = J(m)J(n)$. این توابع را قویاً ضربی می‌نامند.*

مثال ۷. *فرض کنیم $I : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ به صورت $I(n) = n$ تعریف شود؛ در این صورت برای هر دو عدد طبیعی m و n که $(m,n) = ۱$، $I(mn) = I(m)I(n)$ و لذا I تابعی ضربی است. توجه می‌کنیم که در واقع I قویاً ضربی است.*

اکنون به کمک تعریف ۲ و به استقرا، می‌توانیم قضیهٔ زیر را نتیجه بگیریم:

قضیه ۱. *فرض کنیم $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک تابع حسابی ضربی باشد؛ داریم*

$$f(p_۱^{\alpha_۱} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_۱^{\alpha_۱}) \dots f(p_k^{\alpha_k})$$

که در آن $p_۱, \dots, p_k$ اعداد اول متمایزند و $\alpha_۱, \dots, \alpha_k$ اعداد طبیعی.

در واقع، این قضیه حاکی از آن است که برای به دست آوردن ضابطه‌ای صریح برای محاسبهٔ مقدار تابع حسابی، کافی‌ست مقدار آن را در توان‌های اعداد اول بدانیم.

اکنون قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که در محاسبهٔ ضابطهٔ صریح توابع حسابی کارساز است.

قضیه ۲. *اگر $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک تابع حسابی ضربی باشد، تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ یک تابع حسابی ضربی است(منظور از $\sum_{d|n}$ مجموع روی مقسوم علیه‌های مثبت n است).*

برهان. این که g تابعی حسابی است واضح است. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند که $(m,n) = ۱$؛ در این صورت

$$g(m)g(n) = \left(\sum_{d|m} f(d)\right)\left(\sum_{d'|n} f(d')\right) = \sum_{d|m}\sum_{d'|n} f(d)f(d').$$

اکنون توجه می‌کنیم که $d \mid m$ و $d' \mid n$ و $(m,n) = ۱$ نتیجه می‌دهد که $(d,d') = ۱$ و لذا ضربی بودن f ایجاب می‌کند که $f(dd') = f(d)f(d')$؛ پس می‌توانیم بنویسیم

$$g(m)g(n) = \sum_{d|m}\sum_{d'|n} f(dd').$$

به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\{dd' :\ d \mid m, d' \mid n\} = \{s :\ s \mid mn\}$$

و در نتیجه

$$g(m)g(n) = \sum_{s|mn} f(s) = g(mn)$$

و این نشان می‌دهد که g تابع ضربی است. ■

تابع حسابی d

فرض کنیم $d(n)$ برابر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n باشد. این ضابطه، تابع $d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را به‌دست می‌دهد که در مثال ۳ نیز آن را معرفی کردیم. اکنون، به کمک قضیهٔ ۲، ثابت می‌کنیم که d تابعی ضربی است.

لم ۱. *تابع $d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ضربی است.*

برهان. تابع $J : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $J(n) = ۱$ را که در مثال ۶ معرفی شد، در نظر می‌گیریم؛ این تابع به‌وضوح ضربی است. حال توجه می‌کنیم که

$$d(n) = \text{تعداد مقسوم علیه‌های مثبت } n = \underbrace{۱ + \cdots + ۱}_{\text{به تعداد مقسوم علیه‌های مثبت } n} = \sum_{d|n} J(d);$$

اکنون قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که d ضربی است. ■

لم ۲. *برای هر عدد طبیعی α و هر عدد اول p،* $d(p^\alpha) = \alpha + ۱$.

برهان. واضح است که تنها مقسوم علیه‌های مثبت p^α عبارتند از ۱،p،$\ldots$،p^α که تعدادشان برابر $\alpha + ۱$ است؛ پس $d(p^\alpha) = \alpha + ۱$. ■

قضیه ۳. *داریم*

$$d(n) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n = ۱: \\ \\ (\alpha_۱ + ۱)\cdots(\alpha_k + ۱) & \text{اگر } n = p_۱^{\alpha_۱}\cdots p_k^{\alpha_k}: \end{cases}$$

که در آن p_i ها اعداد اول متمایزند و α_i ها طبیعی.

برهان. واضح است که برای $n = ۱$، $d(n) = ۱$. اکنون گیریم $n > ۱$. اگر $n = p_۱^{\alpha_۱}\ldots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ استاندارد n به عوامل اول باشد، بنا بر قضیهٔ ۱ و لم ۱ و ۲ داریم

$$\begin{aligned} d(n) &= d(p_۱^{\alpha_۱}\cdots p_k^{\alpha_k}) \\ &= d(p_۱^{\alpha_۱})\cdots d(p_k^{\alpha_k}) \\ &= (\alpha_۱ + ۱)\cdots(\alpha_k + ۱). \end{aligned}$$

■

مثال ۸. *تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n = ۳۶۰$ برابر است با ۲۴؛ زیرا*

$$d(۳۶۰) = d(۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۱) = (۳ + ۱)(۲ + ۱)(۱ + ۱) = ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴.$$

تابع حسابی σ

فرض کنیم $\sigma(n)$ برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n باشد. این ضابطه، تابع $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را به‌دست می‌دهد که در مثال ۴ نیز آن را معرفی کردیم. اکنون، به‌کمک قضیهٔ ۲، ثابت می‌کنیم که σ ضربی است.

لم ۳. *تابع $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ضربی است.*

برهان. تابع $I:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $I(n)=n$ را که در مثال ۷ معرفی شد، در نظر می‌گیریم؛ این تابع به‌وضوح ضربی است. حال توجه می‌کنیم که

$$\sigma(n)=\text{مجموع مقسوم علیه‌های مثبت } n=\sum_{d|n} d=\sum_{d|n} I(d);$$

اکنون قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که σ ضربی است. ■

لم ۴. *برای هر عدد طبیعی* α *و هر عدد اول* p، $\sigma(p^\alpha)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.

برهان. واضح است که تنها مقسوم علیه‌های مثبت p^α عبارتند از $1, p, \ldots, p^\alpha$؛ پس

$$\sigma(p^\alpha)=1+p+\cdots+p^\alpha=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$

■

قضیه ۴. *داریم*

$$\sigma(n)=\begin{cases}1 & \text{اگر } n=1:\\[2ex] \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} & \text{اگر } n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}:\end{cases}$$

که در آن p_i *ها اعداد اول متمایزند و* α_i *ها طبیعی.*

برهان. واضح است که برای $n=1$، $\sigma(n)=1$. اکنون گیریم $n>1$. اگر $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ استاندارد n به عوامل اول باشد آنگاه بنابر قضیهٔ ۱ و لم ۳ و ۴ داریم

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k})\\ &= \sigma(p_1^{\alpha_1})\cdots\sigma(p_k^{\alpha_k})\\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.\end{aligned}$$

■

مثال ۹. *مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت* $n=360$ *برابر است با* 1170؛ *زیرا*

$$\sigma(360)=\sigma(2^3\times 3^2\times 5^1)=\frac{2^4-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}\times\frac{5^2-1}{5-1}=15\times 13\times 6=1170.$$

اکنون چند مسأله در ارتباط با مفاهیم بالا مطرح می‌کنیم.

تمرین.

۱) در قضیهٔ ۳ مقالهٔ تابع حسابی اویلر ثابت کردیم که $\sum_{d|n}\phi(d)=n$. این حکم را به کمک قضیهٔ ۱ و ۲ از این مقاله ثابت کنید.

۲) $\sum_{s|n} d(s)$ و $\sum_{s|n}\sigma(s)$ را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید که $d(n) = ۲$ اگر و فقط اگر n اول باشد.

۴) نشان دهید که $d(n)$ فرد است اگر و فقط اگر n مربع کامل باشد.

۵) نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح $m \geq ۲$، نامتناهی عدد صحیح مانند n موجود است که $d(n) = m$. کوچک‌ترین عدد صحیح n که دارای این خاصیت باشد کدام است؟

۶) نشان دهید $\prod_{d|n} d = n^{\frac{d(n)}{۲}}$ ($\prod_{d|n}$ یعنی حاصل‌ضرب روی کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n).

۷) ثابت کنید که $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{۱}{d}$.

۸) نشان دهید $d(n) \leq ۲\sqrt{n}$.

۹) نشان دهید که برای هر n، $n \leq \sigma(n) \leq n^۲$.

۱۰) عدد تام، عددی طبیعی مانند n است که با مجموع مقسوم‌علیه‌های سرهٔ خود (یعنی مقسوم‌علیه‌های مثبت n غیر از خود n) برابر باشد. ثابت کنید اگر $۲^a - ۱$ عددی اول باشد آنگاه $۲^{a-۱}(۲^a - ۱)$ عددی تام است.

۱۱) فرض کنید n عددی زوج و تام باشد. ثابت کنید n به صورت $۲^{a-۱}(۲^a - ۱)$ است که در آن $۲^a - ۱$ عددی اول است.

۱۲) ثابت کنید اگر n عددی تام باشد آنگاه $۲ = \sum_{d|n} \frac{۱}{d}$.

مراجع

[۱] ویلیام و. آدامز و لری جوئل گولدشتین، آشنایی با نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی. مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۲.

[۲] نیل. اچ. مک‌کوی، نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ غلامحسین بهفروز و میرکمال میرنیا. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۳.